24．確率的Verhulst 方程式による人口増加のダイナミクスの再考察

東大・教養　牧　野　淳一郎

確率的 Verhulst 方程式

$$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x(\alpha + \lambda(t) - x) \tag{1}$$

但し α ：正定数，$\lambda(t)$ ：ホワイトノイズ，

$$\langle \lambda(t) \cdot \lambda(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t') \tag{2}$$

によって記述される変数 x の平均値 $\langle x \rangle$ の時間依存解は，すでに浜田[1)]，森田[2)]により求められているが，それらにおいては，$\langle x \rangle$ が定常に達するまでに複雑な振動的挙動をすることが示されていた。しかし，数値計算によりそのような振動は起らないということを示すことができたので[3)]，それについて報告する。

数値計算にあたっては，通常行われるモンテカルロ法にはよらず，(1)から確率分布に関する Fokker-Planck 方程式を導き，それに対し差分近似を行うという方法をとった。この方法は，特に一次元の場合は精度を計算時間に比例して向上させられることが多い。これに対し，モンテカルロではせいぜい計算精度の平方根程度でしか精度が向上しない。このため，Fokker－Planck方程式を差分近似するほうが，もとの確率微分方程式をモンテカルロ・シミュレーションするよりずっとすくない計算量で精度の高い結果を得ることができる。

しかし，今の場合，(1)から導かれる Fokker-Planck方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)x - x^2 - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}x^2\right] P(x, t) \tag{2}$$

は，差分法で扱うのが困難である。これは，拡散係数すなわち2階の項の係数が x の関数になることと，特に $x = 0$ で1階の項も2階の項も0になることによる。これらの困難の原因は，(1)においてノイズが加法的ではないことである。そのため，以下の変換

$$z = \ln x \tag{3}$$

により変数 z を導入する。すると z に対する確率微分方程式は

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = \alpha + \lambda(t) - \exp(z) \tag{4}$$

となり，ノイズが加法的になる[4]。これから z の確率分布に対する方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{2}{\sigma^2}(e^z-\alpha)f\right] \quad (5)$$

を導くことができる。(5)では拡散係数が定数になっていることに注意してほしい。このために容易に差分近似を適用できる。なお，差分スキームは Clanck-Nicholson に類似の陰解法である。

計算結果を図1に示す。これは浜田[1]とおなじ数値例について計算したものである。なお，初期条件は

$$f(z, 0)=\delta(z-\ln\alpha) \quad (6)$$

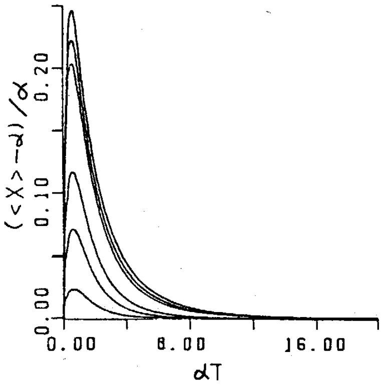

図1　$(\langle x\rangle-\alpha)/\alpha$ の時間変化
下から順に，$\sigma^2/2\alpha=0.1$, 0.3, 0.5, 0.9, 0.99, 1.1

である。どの場合にもピークがひとつでるだけで振動的な挙動は示さない。なお，このようなふるまいに対する解釈については，牧野・森田[3]を参照されたい。

最後に，従来の結果との不一致の理由について簡単に述べる。まず，浜田のものについては，解析解そのものは正しく，注意深く数値積分を行えばわれわれのものと同じ解が得られるが，積分の精度が十分でないと，たしかに振動的な結果が得られた。つまり，不一致の原因は数値的なものであった。また，森田のものについては，彼の式において，高次項を切りすてたのが不一致の原因であると考えられる。なお，現在，確率的 Verhulst 方程式に対する解析的取り扱いについての報告を，準備中である。

参 考 文 献

1)　Y. Hamada, Prog. Theor. Phys. **65** (1981), 850.
2)　A. Morita, J. Chem. Phys. **76** (1982), 4191.
3)　J. Makino and A. Morita, Prog. Theor. Phys. **73** (1985), No. 5 (in press).
4)　M. Suzuki, in *Noise in Physical Systems and 1/f Noise*, eds. M. Savelli, G. Lecoy, and J-P. Nougier (Elsevier, 1983).